SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统

第六章 离散信号与系统的变换域分析

南京邮电大学

通信与信息工程学院

第六章 离散信号与系统的变换域分析

- 离散信号与系统的变换域分析概述
- 6.1 Z 变换
- 6.2 Z 变换的性质
- 6.3 Z 反变换
- 6.4 离散系统的 Z 域分析
- 6.5 离散系统函数与系统特性
- 6.6 离散系统的模拟
- 6.7 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

连续时间系统的复频域分析概述

时域分析：跟连续信号与系统有许多相似之处

变换域分析：

- 连续信号与系统：

  傅里叶变换分析、拉普拉斯变换分析

- 离散信号与系统：

  离散时间傅里叶变换分析、Z变换分析

★ 主要讨论 Z 变换分析

★ 注意和连续信号与系统的联系与区别

第六章 离散信号与系统的变换域分析

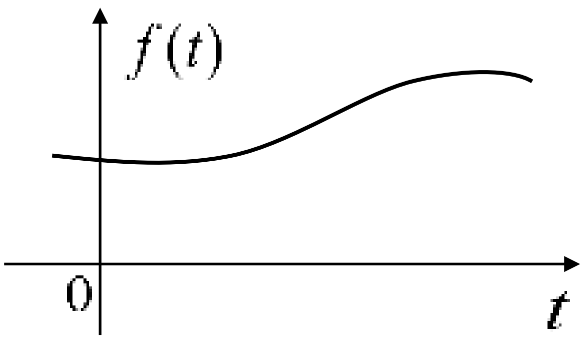
- 离散信号与系统的变换域分析概述
- 6.1 Z 变换
- 6.2 Z 变换的性质
- 6.3 Z 反变换
- 6.4 离散系统的 Z 域
- 6.5 离散系统函数与系统特性
- 6.6 离散系统的模拟
- 6.7 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

6.1.1 从拉氏变换到Z变换
6.1.2 Z变换的定义
6.1.3 Z变换的定义域
6.1.4 常用信号的Z变换

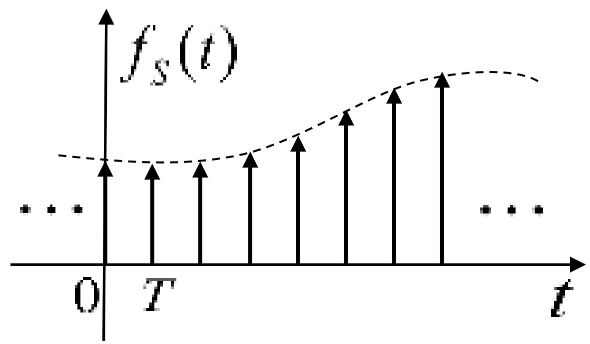
6.1.1 从拉氏变换到Z变换

对连续函数 $f(t)$ 以均匀间隔 T 进行理想抽样，得

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$



$\leftrightarrow F(s)$



$\leftrightarrow F_S(s)$

则 $f_s(t)$ 的拉氏变换 $F_s(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-ksT}$

设 $z = e^{sT}$，或 $s = \dfrac{1}{T}\ln z$，则

$$F_s(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)z^{-k} = F(z)$$

6.1.2 Z变换的定义

定义：离散信号（序列）的Z变换为

$$F(z)=\cdots+f(-1)z^{1}+f(0)z^{0}+f(1)z^{-1}+\cdots f(k)z^{-k}+\cdots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$$ **双边 Z 变换**

简写为 $F(z)=Z[f(k)]$ 称作Z正变换

相应地 $f(k)=Z^{-1}[F(z)]$ 称作Z反变换

记作（原函数）$f(k)\leftrightarrow F(z)$（象函数）

当$f(k)$为因果序列，或者只考虑$f(k)$的$k\geq 0$的部分时，则

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}$$ **单边 Z 变换**

6.1.3 Z变换的定义域

1. 单边Z变换

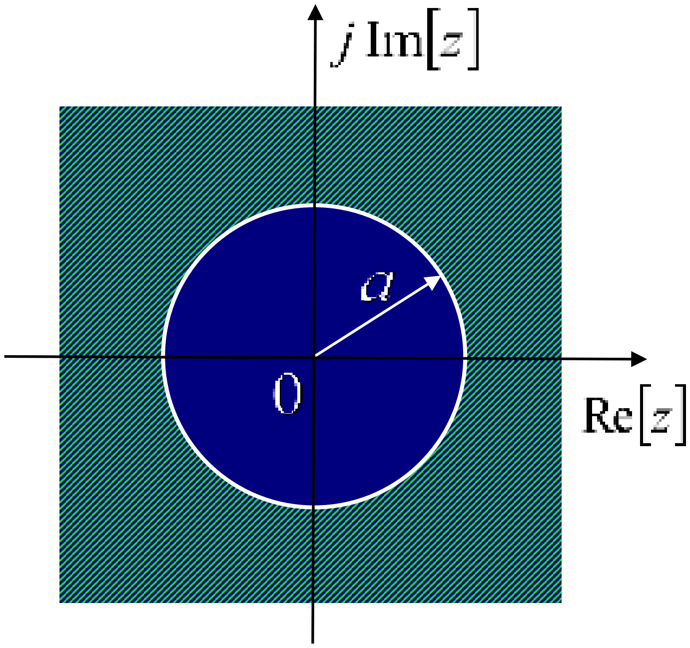
因果序列$f(k)=\begin{cases} a^k & k\geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$（$a$为正实数）的Z变换为

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(az^{-1})^k$$

当$\left|az^{-1}\right|<1$，即$|z|>a$时，

该无穷级数绝对收敛。

单边Z变换的收敛域为圆心在原点，半径为a的圆外区域。收敛条件比较简单，一般情况下不再加注其收敛域。

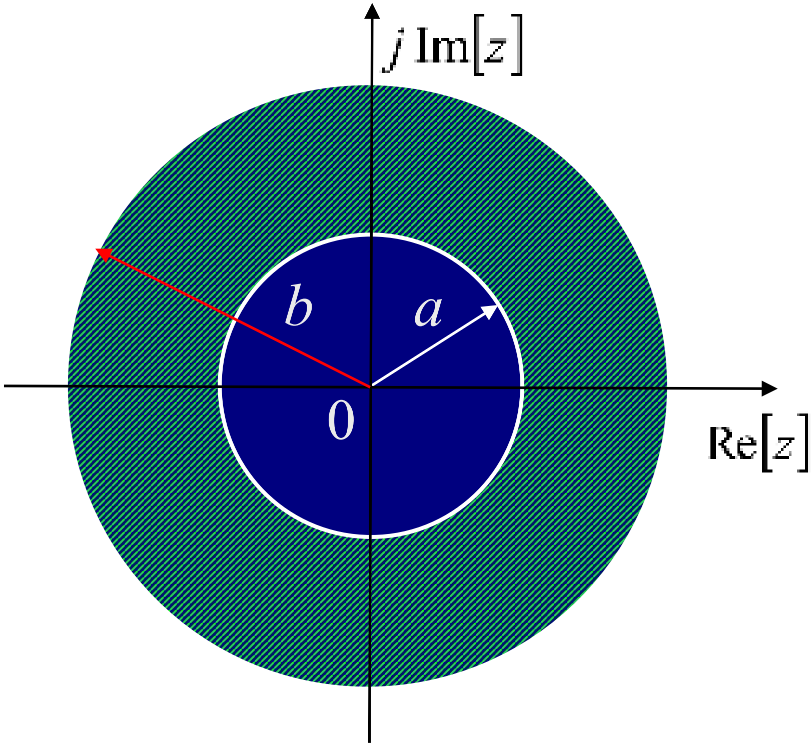


6.1.3 Z变换的定义域

2. 双边Z变换

$$f(k)=\begin{cases} a^k & k\ge 0 \\ b^k & k<0 \end{cases}$$

（a，b为正实数）



$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}+\sum_{k=-\infty}^{-1}b^k z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}+\sum_{k=1}^{\infty}b^{-k} z^{k}$$

收敛域为$\left|az^{-1}\right|<1,\left|b^{-1}z\right|<1$，即 $a<|z|<b$。

若$a\ge b$，则无收敛域，Z变换不存在。

有限序列Z变换的收敛域为 整个Z平面。

6.1.4 常见信号的 Z 变换

1. 单位脉冲序列 $\delta(k)$

$$Z[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = z^{-k}\Big|_{k=0} = \boxed{1}$$

2. 单位阶跃序列 $u(k)$

$$Z[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \boxed{\frac{z}{z-1}}$$

3. 指数序列 $a^k u(k)$

$$Z[a^k u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \boxed{\frac{z}{z-a}}$$

当 $a = e^{\lambda T}$ 时， $Z[e^{\lambda kT} u(k)] = \boxed{\dfrac{z}{z-e^{\lambda T}}}$

4. 单边正弦序列 $\sin\Omega_0 ku(k)$ 和单边余弦序列 $\cos\Omega_0 ku(k)$

取 $a=e^{j\Omega_0}$，则

$$z\left[e^{j\Omega_0 k}u(k)\right]=z\left[\cos\Omega_0 ku(k)\right]+jz\left[\sin\Omega_0 ku(k)\right]$$

$$=\frac{z}{z-e^{j\Omega_0}}=\frac{z}{z-\cos\Omega_0-j\sin\Omega_0}=\frac{z(z-\cos\Omega_0)+jz\sin\Omega_0}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$$

对比，得

$$z\left[\cos\Omega_0 ku(k)\right]=\frac{z(z-\cos\Omega_0)}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$$

$$z\left[\sin\Omega_0 ku(k)\right]=\frac{z\sin\Omega_0}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$$

$$z\left[\cos\frac{\pi}{2}ku(k)\right]=\frac{z^2}{z^2+1}$$

$$z\left[\sin\frac{\pi}{2}ku(k)\right]=\frac{z}{z^2+1}$$

5. $z[ku(k)]=\dfrac{z}{(z-1)^2}$，　$z[k^2u(k)]=\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

第六章 离散信号与系统的变换域分析

- 离散信号与系统的变换域分析概述
- 6.1 Z 变换
- 6.2 Z 变换的性质
- 6.3 Z 反变换
- 6.4 离散系统的 Z 域分析
- 6.5 离散系统函数与系统特性
- 6.6 离散系统的模拟
- 6.7 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

1. 线性

若 $\mathcal{Z}[f_1(k)] = F_1(z)$，$\mathcal{Z}[f_2(k)] = F_2(z)$

则 $\mathcal{Z}[a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k)] = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$

2. 移序（移位）性

若 $\mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$

则 $\mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$

推广 $\mathcal{Z}[f(k+m)] = z^{m}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k}\right]$

左移序性质，相当于拉氏变换的微分性质

$\mathcal{Z}[f(k-1)] = z^{-1}F(z) + f(-1)$

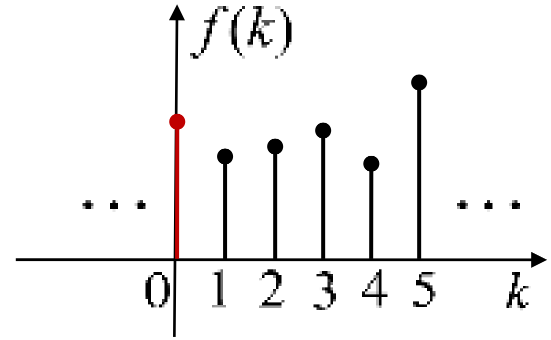
推广 $\mathcal{Z}[f(k-m)] = z^{-m}\left[F(z) + \sum_{k=1}^{m} f(-k) z^{k}\right]$

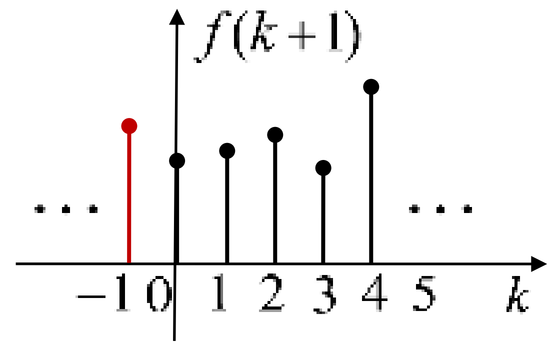
右移序性质，相当于拉氏变换的积分性质

证明 $\sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} = z\sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-(k+1)}$

$$= z\sum_{j=1}^{\infty} f(j)z^{-j} = z\left[\sum_{j=0}^{\infty} f(j)z^{-j} - f(0)\right]$$

$$= zF(z) - zf(0)$$





右移序性质同理可证（略）

对于右移序性质：

$$Z[f(k-m)] = z^{-m}\left[F(z) + \sum_{k=1}^{m} f(-k)z^{k}\right]$$

当 $f(-1) = f(-2) = \cdots = f(-m) = 0$ 时，有 $Z[f(k-m)] = z^{-m}F(z)$

即 $$Z[f(k-m)u(k-m)] = z^{-m}F(z)$$

另 $$Z[\delta(k-m)] = z^{-m}, \quad Z[\delta(k+m)] = 0 \quad (m > 0)$$

Z 变换的移序性质能将关于 $f(k)$ 的差分方程转化为关于 $F(z)$ 的代数方程，使得对离散系统的分析大为简化。

例5-2-1　试求离散信号 $f(k)=\delta(k-1)+\delta(k+1)$ 的 Z 变换式。

解　$z[f(k)]=z[\delta(k-1)+\delta(k+1)]=z^{-1}+0=z^{-1}$

例5-2-2　已知 $z\left[a^k\right]=\dfrac{z}{z-a}$，分别求 a^{k-1}， $a^{k-1}u(k)$ 和 $a^{k-1}u(k-1)$ 的 Z 变换式。

解　设 $f(k)=a^k$，则 $f(k-1)=a^{k-1}$，根据右移序性质，有

$$z\left[a^{k-1}\right]=z^{-1}z\left[a^k\right]+a^{-1}=z^{-1}\frac{z}{z-a}+\frac{1}{a}=\frac{z}{a(z-a)}$$

由于是单边 Z 变换，有　$z\left[a^{k-1}\right]=z\left[a^{k-1}u(k)\right]=\dfrac{z}{a(z-a)}$

$$z\left[a^{k-1}u(k-1)\right]=z^{-1}z\left[a^k u(k)\right]=z^{-1}\frac{z}{z-a}=\frac{1}{z-a}$$

例5－2－3　已知 $F(z)=\dfrac{1}{z^9(z+1)}$，试求对应于 $F(z)$ 的离散信号 $f(k)$。

解：
$$F(z)=\frac{1}{z^{10}}\cdot\frac{z}{z+1}=z^{-10}\cdot\frac{z}{z+1}$$

$$\because \quad \mathcal{Z}\left[(-1)^k u(k)\right]=\frac{z}{z+1}$$

$$\therefore \quad f(k)=(-1)^{k-10}u(k-10)=(-1)^k u(k-10)$$

单边周期序列的 Z 变换

例5－2－4　已知单边周期序列 $f(k)=\sum_{m=0}^{\infty} f_1(k-mN)$，

m，N 为整数，N 为周期序列的周期，若设

$z[f_1(k)u(k)]=F_1(z)$，试求 $f(k)$ 的 Z 变换 $F(z)$。

解：$f(k)=f_1(k)u(k)+f_1(k-N)u(k-N)+\cdots$

$$z[f(k)]=F_1(z)+z^{-N}F_1(z)+z^{-2N}F_1(z)+\cdots=F_1(z)\left[\sum_{m=0}^{\infty} z^{-mN}\right]$$

若 $\left|z^{-N}\right|<1$，则

$$F(z)=F_1(z)\frac{1}{1-z^{-N}}=F_1(z)\frac{z^{N}}{z^{N}-1}$$

3. 比例性 (尺度变换)

若 $z[f(k)] = F(z)$ 则 $z[a^k f(k)] = F\left(\frac{z}{a}\right)$

证明 $z[a^k f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = F\left(\frac{z}{a}\right)$

也称为序列的指数加权性质，表明时域中乘以指数序列 a^k，相当于 Z 域中变量 z 除以 a。

例5－2－5 求指数衰减序列 $\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin\frac{\pi}{2}k u(k)$ 的 Z 变换。

解 $z\left[\sin\frac{\pi}{2}k u(k)\right] = \frac{z}{z^2+1}$，由指数加权性质，得

$$z\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin\frac{\pi}{2}k u(k)\right] = \frac{(2z)}{(2z)^2+1} = \frac{2z}{4z^2+1}$$

4. Z域微分

若 $\mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$ 则 $\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\dfrac{dF(z)}{dz}$

证明 $$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\frac{d}{dz}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\left(-kz^{-k-1}\right)$$

$$= -z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} kf(k)z^{-k} = -z^{-1}\mathcal{Z}[kf(k)]$$

即 $$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

也称为序列的线性加权性质，表明时域中乘以 **k**，对应于 **Z** 域中对 **Z** 变换取导数并乘以 **-z**。

推广 $$\mathcal{Z}[k^m f(k)] = \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m F(z)$$

例5－2－6：已知$\mathrm{Z}[ku(k)]=\frac{z}{z-1}$，求序列$ku(k)$、$k^2u(k)$和$ka^ku(k)$的Z变换。

解 $$Z[ku(k)]=-z\frac{d}{dz}Z[u(k)]=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

以及 $$Z\left[k^2u(k)\right]=-z\frac{d}{dz}Z[ku(k)]=-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]$$

$$=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$Z\left[ka^ku(k)\right]=-z\frac{d}{dz}Z\left[a^ku(k)\right]=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right)$$

$$=\frac{az}{(z-a)^2}$$

5. 时域卷积定理

若 $\quad \mathcal{Z}[f_1(k)] = F_1(z)$，$\mathcal{Z}[f_2(k)] = F_2(z)$

则 $\quad \mathcal{Z}[f_1(k) * f_2(k)] = F_1(z)F_2(z)$

例5－2－7　求下列两单边指数序列的卷积。

$$x(k) = a^k u(k),\quad h(k) = b^k u(k) \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b)$$

解 $\quad X(z) = \dfrac{z}{z-a}$，$H(z) = \dfrac{z}{z-b}$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{az}{z-a} - \frac{bz}{z-b}\right)$$

$$y(k) = x(k) * h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \frac{1}{a-b}\left(a^{k+1} - b^{k+1}\right)u(k)$$

6. 序列求和

若 $\quad \mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$

则 $\quad \mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^{k} f(n)\right] = \dfrac{z}{z-1}F(z)$

证明　利用时域卷积定理，可以得到序列求和的Z变换式。

因为 $\quad f(k)u(k) * u(k) = \sum_{n=0}^{k} f(n)$

由时域卷积定理，得

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^{k} f(n)\right] = \mathcal{Z}[f(k)u(k) * u(k)] = \frac{z}{z-1}F(z)$$

例5－2－8　已知 $f_1(k)=(-1)^k\sum_{m=0}^{k}2^m$，$f(k)=kf_1(k)$，试求 $f(k)$ 的单边 Z 变换。

解：$z\left[2^k\right]=\dfrac{z}{z-2}$

$$z\left[\sum_{m=0}^{k}2^m\right]=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z-2}=\frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$$

$$z\left[(-1)^k\sum_{m=0}^{k}2^m\right]=\frac{\left(z/_{-1}\right)^2}{\left(z/_{-1}-1\right)\left(z/_{-1}-2\right)}=\frac{z^2}{(z+1)(z+2)}$$

$$z\left[k\ (-1)^k\sum_{m=0}^{k}2^m\right]=-z\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+1)(z+2)}\right]$$

$$=\frac{-z^2(3z+4)}{(z+1)^2(z+2)^2},\quad |z|>2$$

7. 初值定理（也可以用长除法计算）

若 $\mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$，且 $\lim_{z\to\infty} F(z)$ 存在，

则 $f(k)$ 的初值 $f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$

证明　根据 Z 变换的定义

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots + f(n)z^{-n} + \cdots$$

当 $z\to\infty$ 时，上式右边除第一项外，其余各项均趋于零，

所以　$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$

而且　$f(1) = \lim_{z\to\infty} z\left[F(z) - f(0)\right]$

$f(k+m)$ 的 Z 变换

一般公式　$$f(m) = \lim_{z\to\infty} \boxed{z^{m}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k}\right]}$$

8. 终值定理

若 $\mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$，且 $f(k)$ 的终值 $f(\infty)$ 存在，

则 $f(\infty) = \lim\limits_{z \to 1}(z-1)F(z)$

证明 根据 Z 变换的线性和移序性

$$\mathcal{Z}[f(k+1) - f(k)] = zF(z) - zf(0) - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0)$$

上式两边取极限

$$\lim_{z \to 1}(z-1)F(z) - f(0) = \lim_{z \to 1}\sum_{k=0}^{\infty}[f(k+1) - f(k)]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}[f(k+1) - f(k)]$$

$$= \lim_{n \to \infty}[f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \cdots + f(n+1) - f(n)]$$

$$= \lim_{n \to \infty}[f(n+1) - f(0)]$$

$$= f(\infty) - f(0)$$

故 $f(\infty) = \lim\limits_{z \to 1}(z-1)F(z)$

条件：f (k) 的终值存在意味着 F (z) 除了在 z=1 处允许有一个一阶极点外，其余极点必须在单位圆内部。

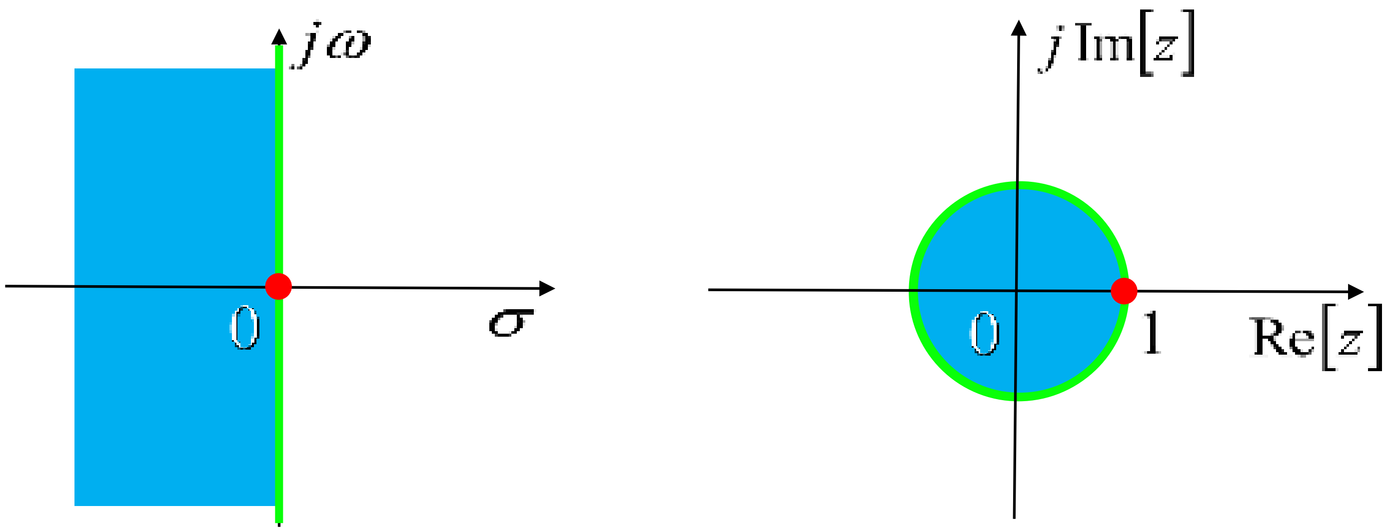
S 平面与 Z 平面的映射关系

$$s=\sigma+j\omega \xrightarrow{\text{映射}} z=e^{sT}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T}$$

$$\text{（纵轴）}\ \sigma=0 \xrightarrow{\text{映射}} |z|=1\text{（单位圆）}$$

$$\text{（原点）}\ s=0 \xrightarrow{\text{映射}} z=1\text{（单位圆上的一点）}$$

$$\text{（左半平面）}\ \sigma<0 \xrightarrow{\text{映射}} |z|<1\text{（单位圆内）}$$



例5－2－9　某序列的Z变换为$F(z)=\dfrac{z}{z-a}$，试求$f(k)$的终值$f(\infty)$。

解　$F(z)$的极点为 $z=a$

要使得终值定理成立，　则应满足 $|a|<1$ 或$a=1$。

当$|a|<1$时，$f(\infty)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)F(z)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\dfrac{z}{z-a}=0$

当$a=1$时，单极点在单位圆上$z=1$处

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}=1$$

当$|a|>1$或$a=-1$时，终值定理不成立。

由$a^k u(k)\leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$，可知：当$a=-1$时，$f(k)=(-1)^k$为不定值。

当$|a|>1$时，$a^k u(k)$不收敛，$f(\infty)=\infty$

例5－2－10　已知 $F(z)=\dfrac{z^3+2z^2-z+1}{z^3+z^2+0.5z}$，试求 $f(0),f(1),f(2),f(\infty)$。

解：求初值 $f(0),f(1),f(2)$：

法一：用公式　$f(0)=\lim\limits_{z\to\infty} z^m F(z)=1$

$$f(1)=\lim_{z\to\infty} z\left[F(z)-f(0)\right]=1$$

$$f(2)=\lim_{z\to\infty} z^2\left[F(z)-f(0)-f(1)z^{-1}\right]=-2.5$$

法二：用长除法，得　$F(z)=1+z^{-1}-2.5z^{-2}+2z^{-3}+\cdots$

$$\therefore\quad f(0)=1,\quad f(1)=1,\quad f(2)=-2.5$$

极点 $p_1=0$，$p_{2,3}=\dfrac{-1\pm j}{2}$，都在单位圆内，可以用终值定理。

$$f(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)F(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z^3+2z^2-z+1)}{z^3+z^2+0.5z}=0$$

Z 变换性质综合应用的例题：

例　已知 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\frac{1}{2}k(k+1)u(k)$，

且 $f_1(k)=u(k)$，试求序列 $f_2(k)$的表达式。

解　$$z[f(k)]=z[f_1(k)]\cdot z[f_2(k)]=\frac{z}{z-1}\cdot z[f_2(k)]$$

又　$$z[f(k)]=z\left[\frac{1}{2}k(k+1)u(k)\right]=z\left[\frac{1}{2}k^2u(k)+\frac{1}{2}ku(k)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(z+1)z}{(z-1)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\therefore\quad z[f_2(k)]=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(z+1)z}{(z-1)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}\right]\div\left[\frac{z}{z-1}\right]=\frac{z}{(z-1)^2}$$

故　$f_2(k)=ku(k)$

例　求序列 $f(k)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(k-n)$ 的单边 Z 变换。

解　$f(k)=u(k)+(-1)u(k-1)+u(k-2)+(-1)u(k-3)+\cdots$

$$z[f(k)]=\frac{z}{z\text{-}1}-z^{-1}\frac{z}{z\text{-}1}+z^{-2}\frac{z}{z\text{-}1}-z^{-3}\frac{z}{z\text{-}1}+\cdots$$

$$=\frac{z}{z\text{-}1}(1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}+\cdots)$$

$$=\frac{z}{z\text{-}1}\cdot\frac{1}{1-(-z^{-1})}=\frac{z^2}{z^2\text{-}1}\quad(|z|>1)$$

例　试求序列 $f(k)=(-1)^k(k-1)u(k-1)$ 的 Z 变换。

解：$Z[ku(k)]=\dfrac{z}{(z-1)^2}$

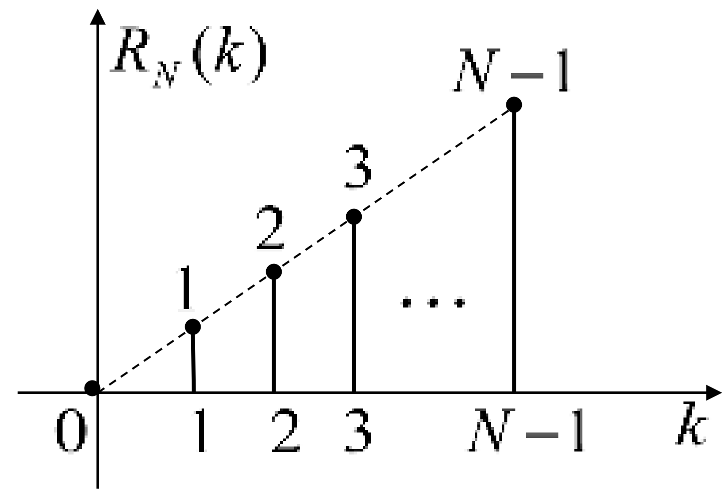
$$Z[(k-1)u(k-1)]=z\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2} \quad \text{右移序性质}$$

$$Z[(-1)^k(k-1)u(k-1)]=\frac{1}{\left(\frac{z}{-1}-1\right)^2} \quad \text{比例性}$$

$$=\frac{1}{(z+1)^2} \qquad |z|>1$$

例 求图示有限长序列的Z变换。

$$R_N(k)=\begin{cases} k & 0\le k\le N-1 \\ 0 & k<0, k\ge N \end{cases}$$



解：

$$R_N(k)=\delta(k-1)+2\delta(k-2)+\cdots+(N-1)\delta(k-N+1)$$

$$=\sum_{m=1}^{N-1} m\delta(k-m)$$

$$Z[\delta(k-m)]=z^{-m}$$

$$\therefore \quad Z[R_N(k)]=\sum_{m=1}^{N-1} mz^{-m}$$

例　试求序列 $f(k)=\begin{cases}1 & k\text{为偶数}\\ 0 & k\text{为奇数}\end{cases}$ 的Z变换。

解　$f(k)=\dfrac{1}{2}[(-1)^k+1]u(k)$

$$F(z)=\frac{1}{2}[\frac{z}{z+1}+\frac{z}{z-1}]=\frac{z^2}{z^2-1}$$

例　试求序列 $f(k)=\begin{cases}1 & k=0,4,8,\cdots 4m,\cdots\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 的Z变换。

解　$f(k)=\delta(k)+\delta(k-4)+\delta(k-8)+\cdots+\delta(k-4m)+\cdots$

$$F(z)=1+z^{-4}+z^{-8}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-z^{-4}}=\frac{z^4}{z^4-1}\qquad |z|>1$$

第六章 离散信号与系统的变换域分析

- 离散信号与系统的变换域分析概述
- 6.1 Z 变换
- 6.2 Z 变换的性质
- 6.3 Z 反变换
- 6.4 离散系统的 Z 域分析
- 6.5 离散系统函数与系统特性
- 6.6 离散系统的模拟
- 6.7 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

6.3.1 幂级数展开法

6.3.2 部分分式展开法

6.3.1 幂级数展开法

$F(z)$展开成z^{-1}的幂级数，则该级数的各项系数即为$f(k)$的值。

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}=f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\cdots$$

1. 当 $F(z)$ 是有理分式时，可采用长除法展开为幂级数。

例5－3－1 $F(z)=\dfrac{2z^2\text{-}1.5z}{z^2\text{-}1.5z+0.5}$，求$f(k)$。

解:利用长除法

$$F(z)=2+1.5z^{-1}+1.25z^{-2}+1.125z^{-3}+\cdots$$

$$\therefore f(k)=\left\{\underset{-}{2},1.5,1.25,1.125,\cdots\right\}$$

此法求$f(k)$的前几个值很方便，缺点是不容易得到$f(k)$的解析式(闭式解)。

6.3.1 幂级数展开法

2. 当 F(z) 不是有理分式的形式时，可直接根据级数理论展开成幂级数。

例5−3−6　求 $F(z)=e^{-\frac{a}{z}}$ 的 Z 反变换。

解　直接用数学公式：$e^{x}=1+x+\dfrac{x^{2}}{2!}+\dfrac{x^{3}}{3!}+\cdots$

$$得\ F(z)=e^{-\frac{a}{z}}=1+\left(-\frac{a}{z}\right)+\frac{\left(-\frac{a}{z}\right)^{2}}{2!}+\cdots+\frac{\left(-\frac{a}{z}\right)^{k}}{k!}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{a}{z}\right)^{k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^{k}}{k!}z^{-k}$$

与 Z 变换的定义式比较，得　$f(k)=\dfrac{(-a)^{k}}{k!}u(k)$

>>返回

6.3.2 部分分式展开法

一般情况下，Z 变换式为有理分式

$$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

对于单边 Z 变换来说，$m \le n$。

考虑到 Z 变换的基本形式为$\dfrac{z}{z-a}$，通常将$\dfrac{F(z)}{z}$展开，然后两边同时乘以 z，得到典型序列的 Z 变换式，再进行反变换。

将 $\dfrac{F(z)}{z}$ 进行部分分式展开的规则和拉氏变换的部分分式展开法相同。

例5－3－2　用部分分式展开法求$F(z)=\dfrac{2z^2-1.5z}{z^2-1.5z+0.5}$的原函数 $f(k)$。

解

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2z-1.5}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{2z-1.5}{(z-1)(z-0.5)}=\frac{A}{z-0.5}+\frac{B}{z-1}$$

$$A=(z-0.5)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0.5}=1$$

遮挡法

$$B=(z-1)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1}=1$$

$$\therefore F(z)=\frac{z}{z-0.5}+\frac{z}{z-1}$$

反变换，得　$f(k)=[(0.5)^k+1]u(k)$

例5-3-3 试求$F(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z^3-1.5z^2+0.5z}$的Z反变换。

解： $$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-1)(z-0.5)}$$

$$=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{8}{z-1}-\frac{13}{z-0.5}$$

$$A=z^2\left.\frac{F(z)}{z}\right|_{z=0}=z^2\left.\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-1)(z-0.5)}\right|_{z=0}=2$$

遮挡法

取 $z=-1$ 代入，得 $\dfrac{2}{3}=2-B-4+\dfrac{26}{3}\quad \therefore B=6$

对应项系数相等法

$$F(z)=\frac{2}{z}+6+\frac{8z}{z-1}-\frac{13z}{z-0.5}$$

$$f(k)=2\delta(k-1)+6\delta(k)+[8-13(0.5)^k]u(k)$$

例5－3－4　已知 $F(z)=\dfrac{4z+4}{(z-1)(z-2)^2}$，试求其 Z 反变换。

解　$\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{4z+4}{z(z-1)(z-2)^2}$

$$=\frac{-1}{z}+\frac{8}{z-1}+\frac{C}{z-2}+\frac{6}{(z-2)^2}$$

遮挡法

取 $z=-1$ 代入，得

对应项系数相等法

$$0=\frac{-1}{-1}+\frac{8}{-1-1}+\frac{C}{-1-2}+\frac{6}{(-1-2)^2}\qquad\therefore C=-7$$

$$\therefore F(Z)=-1+\frac{8z}{z-1}+\frac{-7z}{z-2}+\frac{6z}{(z-2)^2}$$

反变换，得

$$f(k)=-\delta(k)+8u(k)-7(2)^k u(k)+3k(2)^k u(k)$$

例5－3－5　已知$F(z)=\dfrac{z^2+z}{(z-1)(z^2+1)}$，试求其Z反变换。

解　$\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z+1}{(z-1)(z^2+1)}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{Bz+c}{z^2+1}$

遮挡法

上式以$z=0$代入，得　$\dfrac{1}{-1\times 1}=\dfrac{1}{-1}+\dfrac{C}{1}\quad \therefore C=0$

上式以$z=-1$代入，得　$0=\dfrac{1}{-2}+\dfrac{-B}{2}\quad \therefore B=-1$

对应项系数相等法

故　$\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{-z}{z^2+1}$

$$F(z)=\frac{z}{z-1}+\boxed{\frac{-z^2}{z^2+1}}$$

$$f(k)=(1-\cos\frac{\pi}{2}k)u(k)$$

$$\cos\frac{k\pi}{2}u(k)\leftrightarrow\frac{z^2}{z^2+1}$$

$$\sin\frac{k\pi}{2}u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z^2+1}$$

例　试求 $F(z)=\dfrac{z^4-1}{z^6(z-1)}$ 的 Z 反变换。

解：$F(z)=z^{-6}\dfrac{z^4-1}{z-1}=z^{-6}\left(z^2+1\right)\left(z+1\right)$

$$=z^{-6}(z^3+z^2+z+1)$$

$$=z^{-3}+z^{-4}+z^{-5}+z^{-6}$$

$$f(k)=\delta(k-3)+\delta(k-4)+\delta(k-5)+\delta(k-6)$$

第六章 离散信号与系统的变换域分析

- 离散信号与系统的变换域分析概述
- 6.1 Z 变换
- 6.2 Z 变换的性质
- 6.3 Z 反变换
- 6.4 离散系统的 Z 域分析
- 6.5 离散系统函数与系统特性
- 6.6 离散系统的模拟
- 6.7 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

6.4 离散信号的Z域分析

- 变换域分析法：利用Z变换的移序性质，将差分方程变成代数方程

与拉氏变换类似，Z变换分析法可以分别求解零输入响应和零状态响应，也可以直接求解全响应。

时域	$y(k)=y_{zs}(k)+y_{zi}(k)$
	$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
Z域	$Y(z)=Y_{zs}(z)+Y_{zi}(z)$

1. 全响应（已知全响应初始条件时）

以二阶前向差分方程为例

$$a_2 y(k+2)+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)=b_2 x(k+2)+b_1 x(k+1)+b_0 x(k)$$

对上式进行 Z 变换，并应用移序性质，可得

$$a_2[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)]+a_1[zY(z)-zy(0)]+a_0Y(z)$$
$$=b_2[z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)]+b_1[zX(z)-zx(0)]+b_0X(z)$$

整理得 $$Y(z)=\frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{a_2z^2+a_1z+a_0}X(z)+$$

$$+\frac{[a_2y(0)-a_2x(0)]z^2+[a_2y(1)+a_1y(0)-b_2x(1)-b_1x(0)]z}{a_2z^2+a_1z+a_0}$$

$$=Y_{zs}(z)+Y_{zi}(z)$$

例5—4—1 某离散时间的差分方程

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=x(k+1)+3x(k)$$

激励信号$x(k)=u(k)$，若初始条件为$y(1)=1$，$y(2)=3$，求全响应$y(k)$。

解 对差分方程取 Z 变换，得

$$\left[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)\right]+3\left[zY(z)-zy(0)\right]+2Y(z)$$
$$=\left[zX(z)-zx(0)\right]+3X(z)$$

$$\therefore \quad Y(z)=\frac{z+3}{z^2+3z+2}X(z)+\frac{\left(z^2-3z\right)y(0)+zy(1)-zx(0)}{z^2+3z+2}$$

差分方程中令 $k=0$ 代入，得

$$y(2)+3y(1)+2y(0)=x(1)+3x(0)$$

将 $y(1)=1, y(2)=3, x(0)=x(1)=1$ 代入，得$y(0)=-1$

又$\because X(z)=\dfrac{z}{z-1}$ $\quad \therefore Y(z)=\dfrac{z+3}{z^2+3z+2}\cdot\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z(z+3)}{z^2+3z+2}$

$$\therefore \quad \frac{Y(z)}{z}=\frac{z+3}{z^2+3z+2}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{z+3}{z^2+3z+2}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2}\right)+\left(\frac{-2}{z+1}+\frac{1}{z+2}\right)$$

其中，$y_{zs}(k)=\left[\dfrac{2}{3}-(-1)^k+\dfrac{1}{3}(-2)^k\right]u(k)$

$$y_{zi}(k)=-2(-1)^k+(-2)^k,\quad k\geq 0$$

$\therefore$ 全响应$y(k)=y_{zs}(k)+y_{zi}(k)=\dfrac{2}{3}-3(-1)^k+\dfrac{4}{3}(-2)^k,\quad k\geq 0$

2. 零输入响应（已知零输入初始条件时）

以二阶前向差分方程为例：

例5－4－2　已知描述系统的二阶前向差分方程为

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=x(k+2)-3x(k)$$

初始条件为 $y_{zi}(0)=2$，$y_{zi}(1)=3$，试求该系统的零输入响应。

解　当 $x(k)=0$ 时，相应的齐次差分方程为

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=0$$

对上式进行 Z 变换，并应用移序性质，可得

$$z^2Y_{zi}(z)-z^2y_{zi}(0)-zy_{zi}(1)-5[zY_{zi}(z)-zy_{zi}(0)]+6Y_{zi}(z)=0$$

整理，得

$$Y_{zi}(z)=\frac{y_{zi}(0)z^2+[y_{zi}(1)-5y_{zi}(0)]z}{z^2-5z+6}$$

代入零输入响应的初始条件　$y_{zi}(0)=2$，$y_{zi}(1)=3$，得

$$Y_{zi}(z)=\frac{2z^2-7z}{z^2-5z+6}=\frac{3z}{z\text{-}2}-\frac{z}{z\text{-}3}$$

反变换，得　$y_{zi}(k)=3(2)^k-3^k, k\geq 0$

若为后向差分方程时：

例5-4-3　已知描述系统的二阶后向差分方程为

$$y(k)-5y(k-1)+6y(k-2)=x(k)-3x(k-2)$$

初始条件为 $y_{zi}(0)=2$，$y_{zi}(1)=3$，试求其零输入响应。

解：对齐次差分方程进行 Z变换，并应用移序性质，可得

$$Y_{zi}(z)-5\left[z^{-1}Y_{zi}(z)+y_{zi}(-1)\right]+6\left[Z^{-2}Y_{zi}(z)+z^{-1}y_{zi}(-1)+y_{zi}(-2)\right]=0$$

整理，得　$$Y_{zi}(z)=\frac{5y_{zi}(-1)-6y_{zi}(-2)-6y_{zi}(-1)z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}$$

所需初始条件 $y_{zi}(-1)$和 $y_{zi}(-2)$，可以用递推法求得。

在齐次方程中令 $k=1$代入，有

$$y_{zi}(1)-5y_{zi}(0)+6y_{zi}(-1)=0,\text{ 可得 }\quad y_{zi}(-1)=\frac{7}{6}$$

令 $k=0$： $y_{zi}(0)-5y_{zi}(-1)+6y_{zi}(-2)=0$， 有 $y_{zi}(-2)=\dfrac{23}{36}$

将初始条件 $y_{zi}(-1)$和 $y_{zi}(-2)$代入，得

$$Y_{zi}(z)=\frac{2-7z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{2z^2-7z}{z^2-5z+6}=\frac{3z}{z\text{-}2}-\frac{z}{z\text{-}3}$$

反变换，得 $\quad y_{zi}(k)=3(2)^k-3^k, \quad k\geq 0$

说明：

1. 如果所需的初始条件并不是已知的零输入初始条件时，可以用递推的方法在齐次差分方程中求解。

2. 由于在常系数线性差分方程中，各项的序号同时增加或减少同样数目，差分方程所描述的关系不变。因此可以根据初始条件改变差分方程的序号。

3. 零状态响应

时域分析法： $y_{zs}(k)=x(k)*h(k)$

根据时域卷积定理： $\boxed{Y_{zs}(z)=X(z)H(z)}$

离散系统函数 $H(z)=z[h(k)]$

- **$H(z)$的求法：**

与连续系统类似，$H(z)$可以直接由差分方程求解。

以二阶前向差分方程为例

$$a_2y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)$$
$$=b_2x(k+2)+b_1x(k+1)+b_0x(k)$$

对上式进行 Z 变换，并应用移序性质，可得

$$a_2[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)]+a_1[zY(z)-zy(0)]+a_0Y(z)$$
$$=b_2[z^2X(z)-\underline{z^2x(0)-zx(1)}]+b_1[zX(z)-\underline{zx(0)}]+b_0X(z)$$

整理，得 $$(a_2z^2+a_1z+a_0)Y(z)-a_2z^2y(0)-a_2zy(1)-a_1zy(0)$$
$$=(b_2z^2+b_1z+b_0)X(z)-b_2z^2x(0)-b_2zx(1)-b_1zx(0)$$

设初始状态为零，且 $x(k)$ 为零起始序列，对于因果系统必然有 $y(-1)=0$ 和 $y(-2)=0$，以此代入原差分方程，有

$$k=-2 \qquad \boxed{a_2y(0)=b_2x(0)}$$

$$k=-1 \qquad \boxed{a_2y(1)+a_1y(0)=b_2x(1)+b_1x(0)}$$

因此，差分方程的 Z 变换应为（零状态条件下）

$$\boxed{(a_2z^2+a_1z+a_0)Y_{zs}(z)=(b_2z^2+b_1z+b_0)X(z)}$$

$$\therefore \quad H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{a_2z^2+a_1z+a_0}$$

二阶后向差分方程的离散系统函数求法与此类似

总结如下：

二阶前向差分方程：

$$a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_2 x(k+2) + b_1 x(k+1) + b_0 x(k)$$

零状态条件下的Z 变换为：

$$a_2 z^2 Y_{zs}(z) + a_1 z Y_{zs}(z) + a_0 Y_{zs}(z) = b_2 z^2 X(z) + b_1 z X(z) + b_0 X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

二阶后向差分方程：

$$a_2 y(k-2) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k) = b_2 x(k-2) + b_1 x(k-1) + b_0 x(k)$$

零状态条件下的Z 变换为：

$$a_2 z^{-2} Y_{zs}(z) + a_1 z^{-1} Y_{zs}(z) + a_0 Y_{zs}(z) = b_2 z^{-2} X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_0 X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0}$$

例5-4-4　已知描述离散时间系统的差分方程为

$$y(k)+y(k-2)=x(k)+x(k-1)$$

试求该系统的离散系统函数 $H(z)$和单位函数响应 $h(k)$

若激励 $x(k)=u(k)$，求零状态响应 $y_{zs}(k)$。

解　$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+z^{-2}}=\frac{z^2+z}{z^2+1}=\frac{z^2}{z^2+1}+\frac{z}{z^2+1}$$

$$h(k)=\cos\frac{\pi}{2}ku(k)+\sin\frac{\pi}{2}ku(k)$$

$$Y_{zs}(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z^2+z}{z^2+1}$$

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)(z^2+1)}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z^2+1}$$

$$y_{zs}(k)=(1+\sin\frac{\pi}{2}k)u(k)$$

例　已知描述系统的二阶前向差分方程为

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=x(k+2)-3x(k)$$

激励 $x(k)=u(k)$，试求该系统的离散系统函数 $H(z)$ 和单位函数响应 $h(k)$。

解　$H(z)=\dfrac{z^2-3}{z^2-5z+6}$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z^2-3}{z(z^2-5z+6)}=\frac{-\frac{1}{2}}{z}+\frac{-\frac{1}{2}}{z-2}+\frac{2}{z-3}$$

$$h(k)=-\frac{1}{2}\delta(k)+\left[2(3)^k-\frac{1}{2}(2)^k\right]u(k)$$

$$=-\frac{1}{2}\delta(k)+\left\{\left[2(3)^k-\frac{1}{2}(2)^k\right]\Big|_{k=0}\delta(k)+\left[2(3)^k-\frac{1}{2}(2)^k\right]u(k-1)\right\}$$

$$=\delta(k)+\left[2(3)^k-(2)^{k-1}\right]u(k-1)$$

第六章 离散信号与系统的变换域分析

- 离散信号与系统的变换域分析概述
- 6.1 Z 变换
- 6.2 Z 变换的性质
- 6.3 Z 反变换
- 6.4 离散系统的 Z 域分析
- 6.5 离散系统函数与系统特性
- 6.6 离散系统的模拟
- 6.7 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

6.5 离散系统函数与系统特性

$$H(z)=\frac{b_m z^m+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+\cdots+a_1 z+a_0}=H_0\frac{\prod_{r=1}^{m}(z-z_r)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}$$

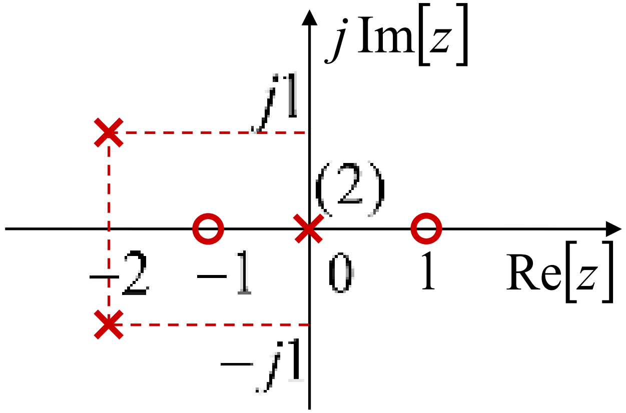
z_r 称为系统函数的零点，p_i 称为系统函数的极点，$H_0=\dfrac{b_m}{a_n}$

- 可以画出$H(z)$的零、极点图，画法和连续系统类似。

例：系统函数为

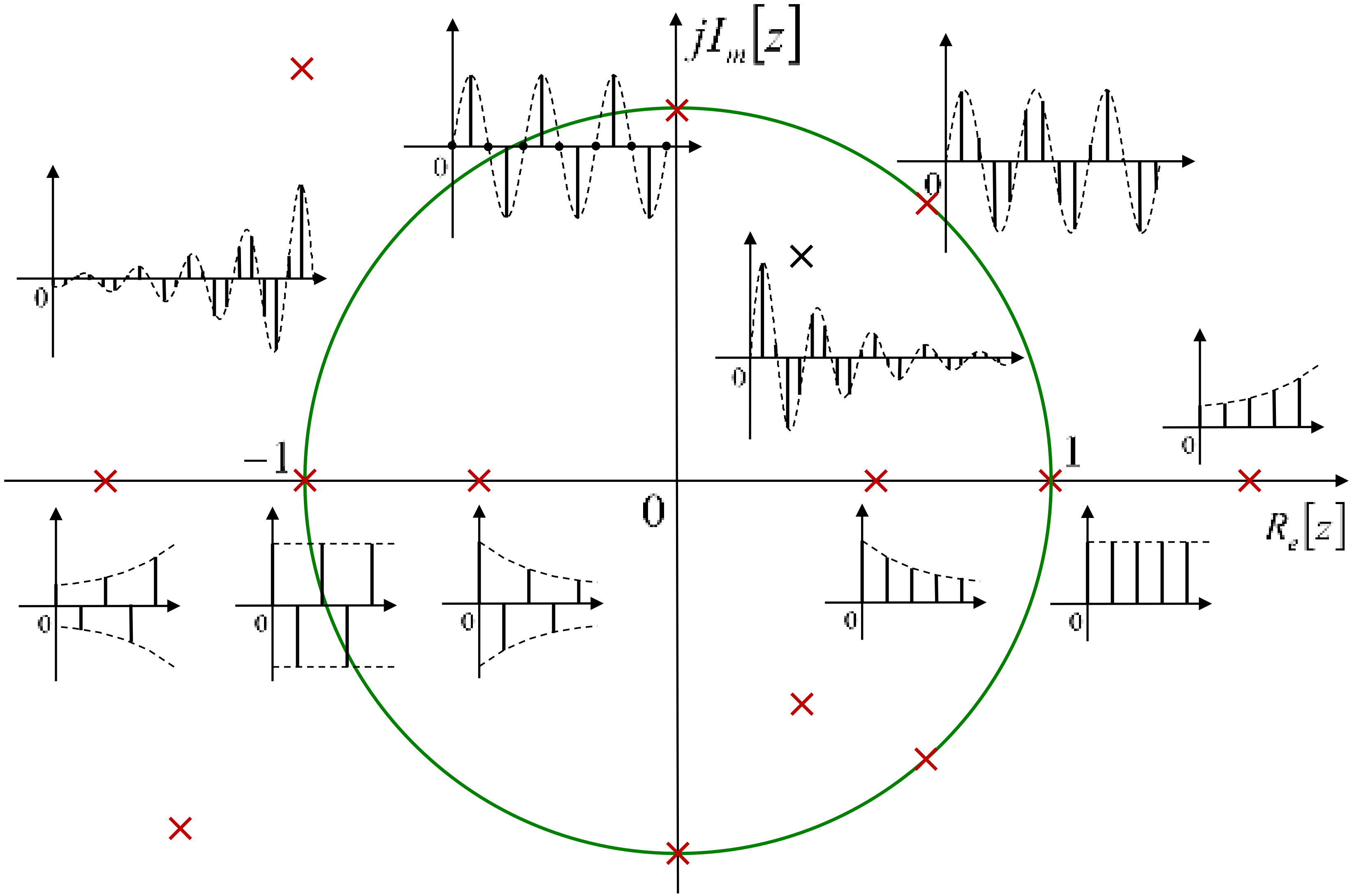
$$H(z)=\frac{(z+1)(z-1)}{z^2(z+2+j)(z+2-j)}$$

则其零、极点图如右图所示。



- **一阶极点的位置与自然响应模式的关系：**

	一阶极点	自然响应的模式
连续时间系统	s	Ae^{st}
离散时间系统	p	Ap^{k}



离散系统的稳定性判别

- **时域：** 对于因果系统来说，其有界输入有界输出(BIBO)稳定的条件为 $\lim_{k\to\infty} h(k) \to 0$
- **Z域：**

（1）稳定系统：$H(z)$的所有极点均 Z 平面单位圆内部。

（2）临界稳定系统：$H(z)$在单位圆上有单极点，其余的所有极点均位于s左半平面。

（3）不稳定系统：其余情况。

由 S 平面和Z 平面的映射关系可知，离散时间系统和连续时间系统的稳定条件是对应的。

例5-5-1 已知系统的差分方程如下，试判定系统的稳定性。

$$y(k)+0.2y(k-1)-0.24y(k-2)=x(k)-x(k-1)$$

解　离散系统函数为

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}}=\frac{z^2-z}{z^2+0.2z-0.24}$$

$$=\frac{z(z-1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

极点 $p_1=0.4$，$p_2=-0.6$

均位于单位圆内，因此该系统是稳定的。

第六章 离散信号与系统的变换域分析

- 离散信号与系统的变换域分析概述
- **6.1 Z** 变换
- **6.2 Z** 变换的性质
- **6.3 Z** 反变换
- **6.4** 离散系统的 **Z** 域分析
- **6.5** 离散系统函数与系统特性
- **6.6** 离散系统的模拟
- **6.7** 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

5.6.1 基本运算器

5.6.2 离散系统的模拟

6.6.1 基本运算器

1. 加法器

$$x_1(k),\ x_2(k) \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow y(k)=x_1(k)+x_2(k)$$

（时域）

$$X_1(z),\ X_2(z) \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow Y(z)=X_1(z)+X_2(z)$$

（Z域）

2. 标量乘法器

$$x(k) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow y(k)=a\cdot x(k)$$

（时域）

$$X(z) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow Y(z)=a\cdot X(z)$$

（Z域）

3. 延时器

$$x(k) \rightarrow \boxed{\mathrm{D}} \rightarrow y(k)=x(k-1)$$

（时域）

$$X(z) \rightarrow \boxed{1/z} \rightarrow Y(z)=\frac{1}{z}X(z)$$

（Z域）

>>返回

6.6.2 离散系统的模拟

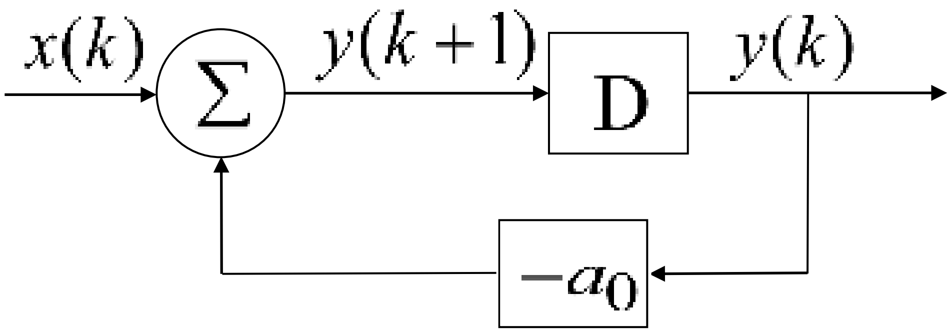
1. 一阶系统的模拟

设描述一阶离散时间系统的差分方程为

$$y(k+1)+a_0 y(k)=x(k)$$

可改写成

$$y(k+1)=-a_0 y(k)+x(k)$$



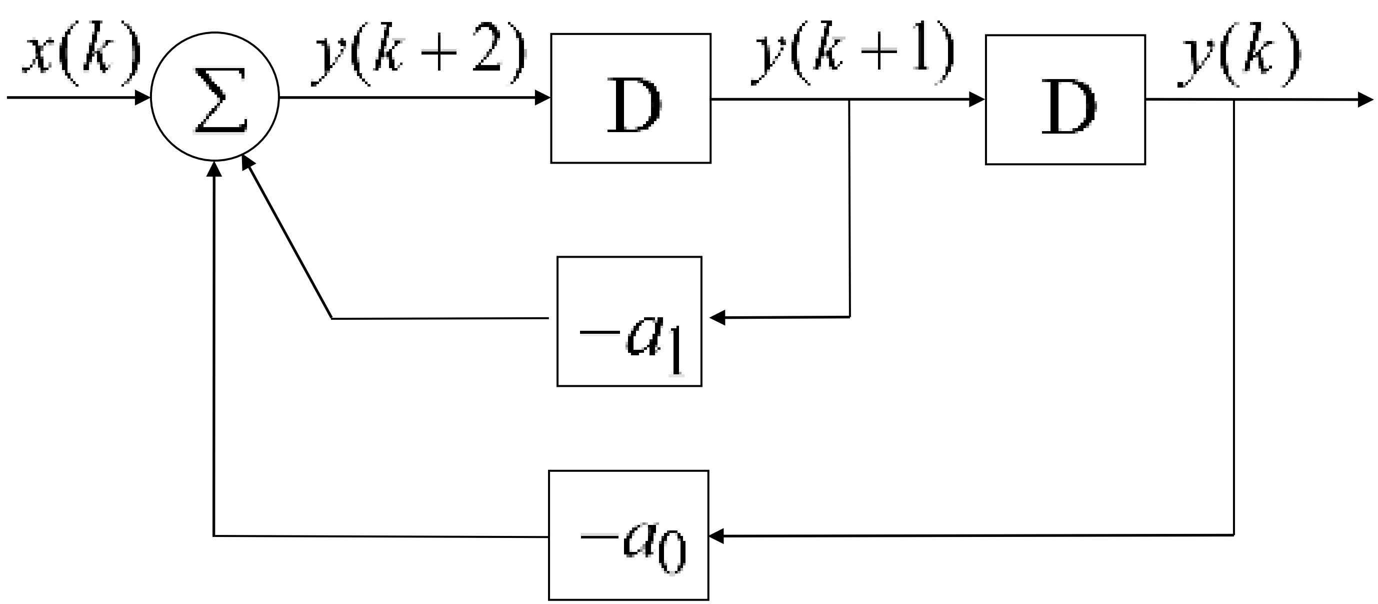
2. 二阶系统的模拟

设描述二阶离散时间系统的差分方程为

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=x(k)$$

可改写成

$$y(k+2)=-a_1y(k+1)-a_0y(k)+x(k)$$



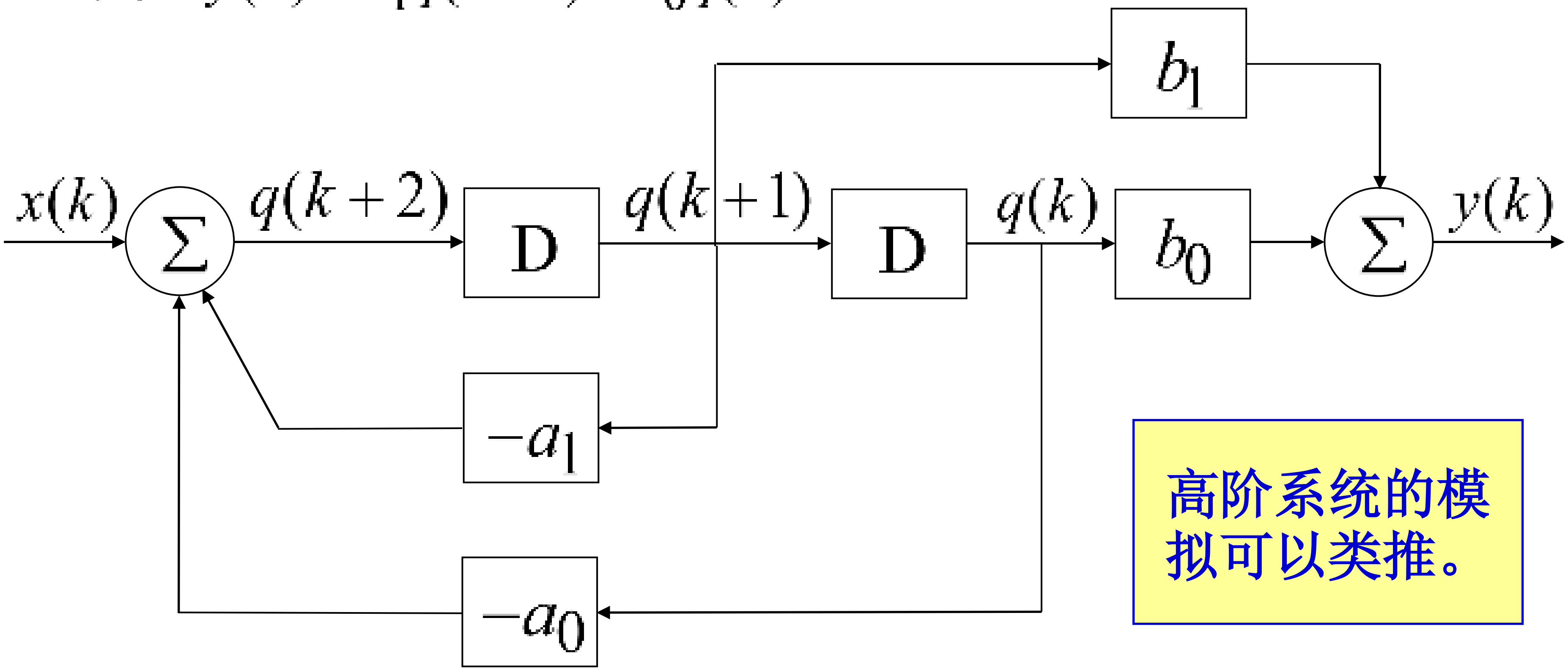
3. 一般二阶系统的模拟

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=b_1x(k+1)+b_0x(k)$$

设辅助函数$q(k)$，使

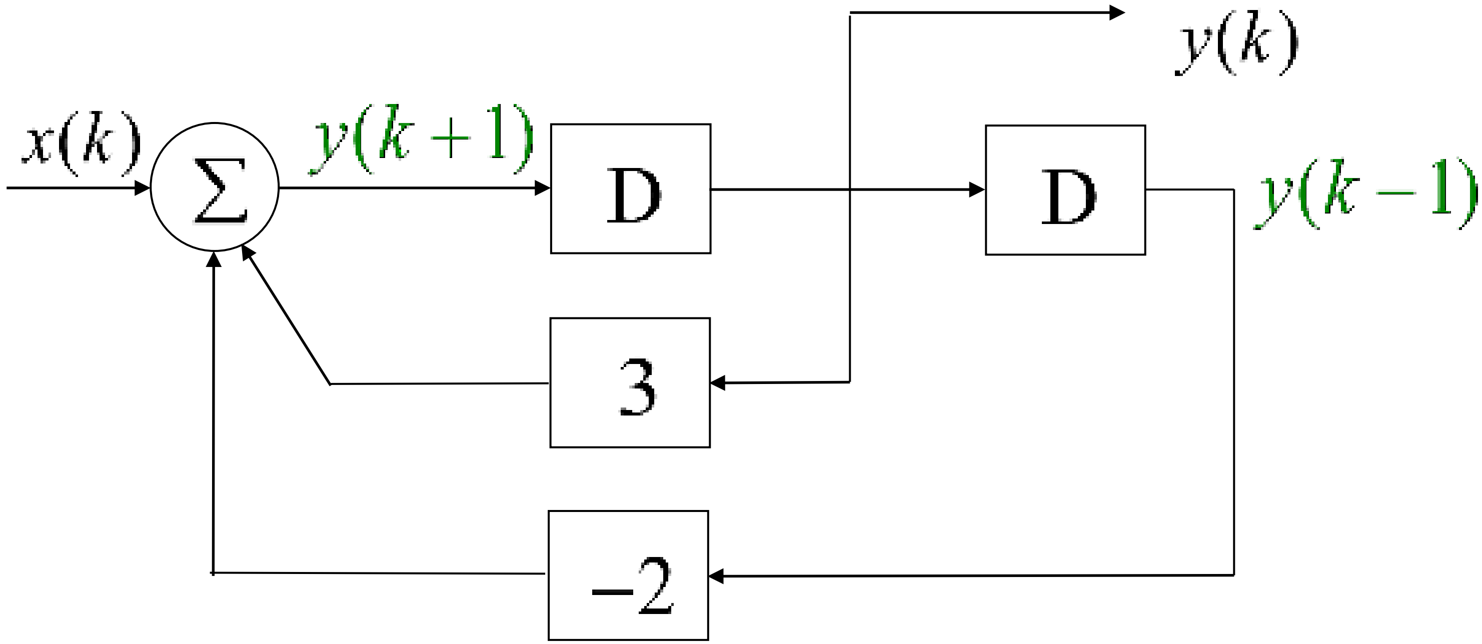
$$q(k+2)+a_1q(k+1)+a_0q(k)=x(k)$$

则 $y(k)=b_1q(k+1)+b_0q(k)$



高阶系统的模拟可以类推。

例：某离散系统如图所示，试写出其差分方程。



解：由模拟图知，加法器的输出为 $y(k+1)$，另一延时器的输出为 $y(k-1)$。

对加法器列方程，得 $y(k+1) = x(k) + 3y(k) - 2y(k-1)$

整理，得 $y(k+1) - 3y(k) + 2y(k-1) = x(k)$

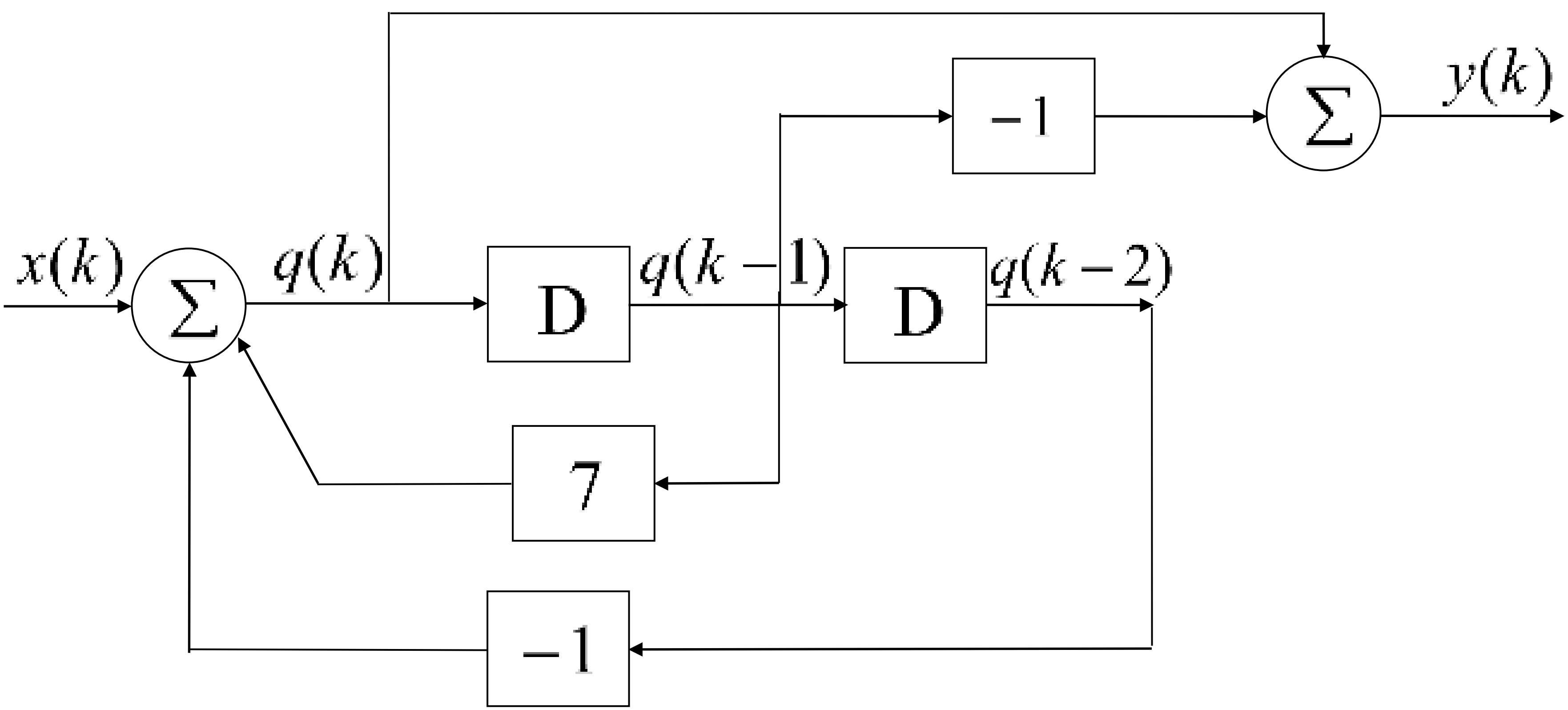
例：已知系统的差分方程如下，试画出其模拟图。

$$y(k)-7y(k-1)+y(k-2)=x(k)-x(k-1)$$

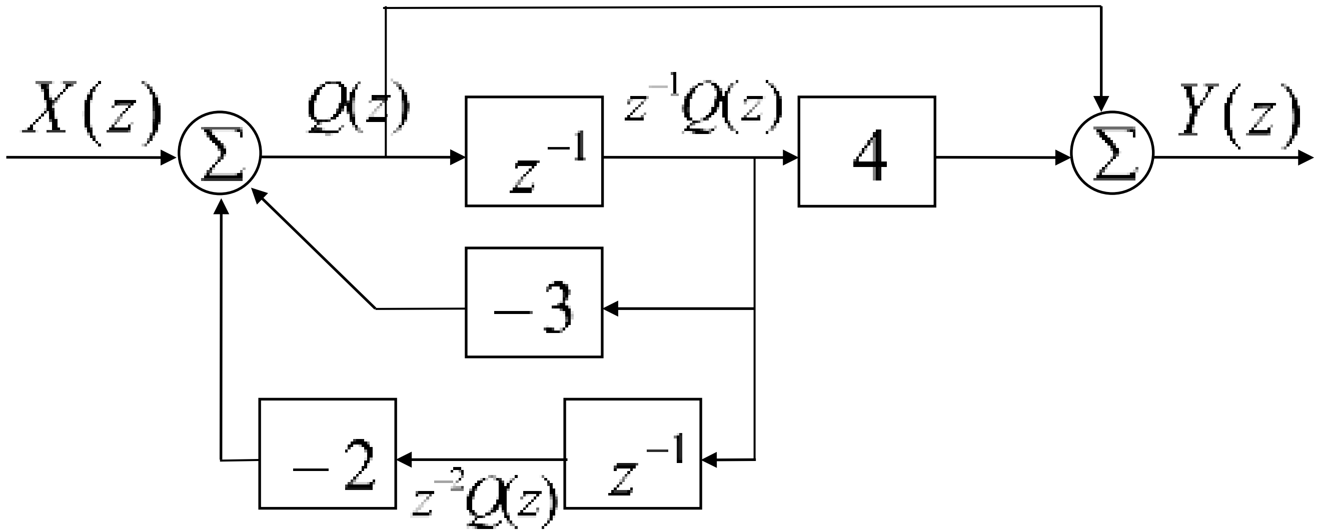
解： 设辅助函数$q(k)$，使

$$q(k)-7q(k-1)+q(k-2)=x(k)$$

则 $y(k)=q(k)-q(k-1)$



例　求图示离散系统的函数响应和单位阶跃响应。



解：设辅助函数$Q(z)$如图所示，对加法器列方程，有

$$Q(z)=X(z)-2z^{-2}Q(z)-3z^{-1}Q(z)$$

$$Y(z)=Q(z)+4z^{-1}Q(z)$$

消去$Q(z)$，得

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^2+4z}{z^2+3z+2}=\frac{3z}{z+1}-\frac{2z}{z+2}$$

$\therefore$ 单位函数响应 $h(k)=[3(-1)^k-2(-2)^k]u(k)$

当激励为单位阶跃序列时

$$x(k)=u(k)\leftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}$$

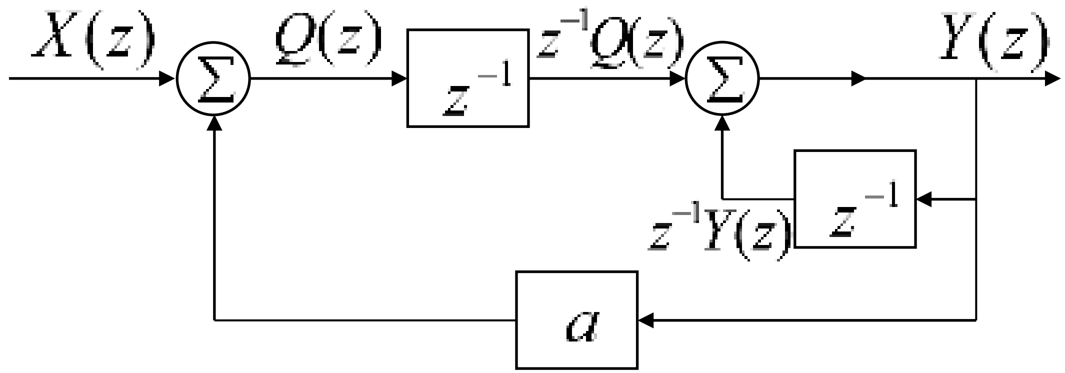
$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{z(z+4)}{(z+1)(z+2)}\frac{z}{(z-1)}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{4}{3}\frac{z}{z+2}+\frac{5}{6}\frac{z}{z-1}$$

所以单位阶跃响应为

$$y(k)=\left[\frac{3}{2}(-1)^k-\frac{4}{3}(-2)^k+\frac{5}{6}\right]u(k)$$

例：试求 a 为何值时，图示离散系统是稳定的？



解　对加法器列方程，得

$$Q(z) = X(z) + aY(z)$$

$$Y(z) = z^{-1}Q(z) + z^{-1}Y(z)$$

$$\therefore \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z-(1+a)}$$

欲使系统稳定，必须使 $|1+a| < 1$

所以，系统稳定的条件为 $-2 < a < 0$

- 离散信号与系统的变换域分析概述
- 6.1 Z 变换
- 6.2 Z 变换的性质
- 6.3 Z 反变换
- 6.4 离散系统的 Z 域分析
- 6.5 离散系统函数与系统特性
- 6.6 离散系统的模拟
- 6.7 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

6.7 离散时间傅里叶变换与离散系统的频率响应特性

6.7.1 离散时间傅里叶变换(DTFT)

用于分析离散时间信号的频谱与系统的频率特性

在离散信号 $f(k)$ 的双边 Z 变换 $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$ 中，

令 $z=e^{j\omega T}$，或简写为 $e^{j\Omega}$，可得离散时间傅里叶变换为

$$F(e^{j\Omega})\text{ 或 }F(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-j\Omega k}$$

显然，$F(\Omega)$ 是 Ω 的连续的周期函数，且周期为 2π 。

$F(\Omega)$ 存在的条件为 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)\right|<\infty$

或 $F(z)$ 的收敛域必须包括 Z 平面上的单位圆。

相应的离散时间傅里叶反变换为

$$f(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\Omega)e^{j\Omega k}d\Omega$$

通常将离散时间傅里叶变换简记为

$$F(\Omega)=\mathrm{DTFT}[f(k)]$$

$$f(k)=\mathrm{IDTFT}[F(\Omega)]$$

实质上，离散时间傅里叶变换是单位圆上的(双边) Z 变换。同时，它又与连续时间傅里叶变换（CTFT）的定义非常相似。因此，连续时间傅里叶变换的性质同样适用于离散时间傅里叶变换。

$F(\Omega)$ 称为离散信号 $f(k)$ 的频谱

6.7.2 离散时间系统的频率响应特性

与连续系统的频率特性相比较：

1. 对于稳定的连续系统，其频率特性 $H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$ 反映了系统在正弦信号激励下，稳态响应随频率变化的情况（频响特性）。

2. 对于稳定的离散系统，其频响特性 $H(e^{j\Omega})=H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$ 反映了系统在正弦序列激励下，稳态响应随频率变化的情况。正弦序列可以用虚指数序列表示，在 $e^{j\omega kT}$ 激励下

$$y_{zs}(k)=h(k)*e^{j\omega kT}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{j\omega(k-n)T}=H(e^{j\omega kT})e^{j\omega kT}$$

表明离散时间系统对于正弦序列的稳态响应仍然是同频率的正弦序列，只是多乘了一个 $H(e^{j\Omega})$。

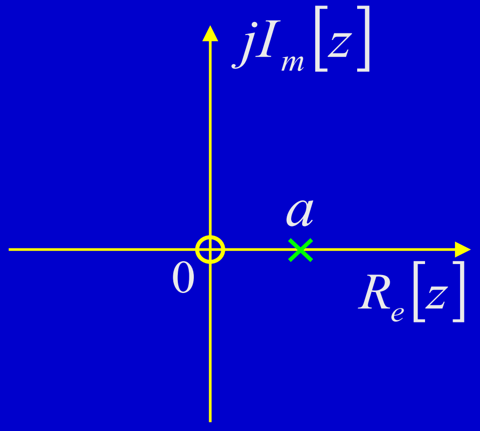
$\left|H(e^{j\Omega})\right|\sim\Omega$ 称为幅频特性； $\theta(\Omega)\sim\Omega$ 称为相频特性。

例： 已知系统的差分方程为

$y(k)-ay(k-1)=x(k)$， $0<a<1$ 试求系该统的频响特性。

解： 由差分方程，离散得系统函数

$$H(z)=\frac{z}{z-a} \qquad h(k)=a^k\varepsilon(k)$$

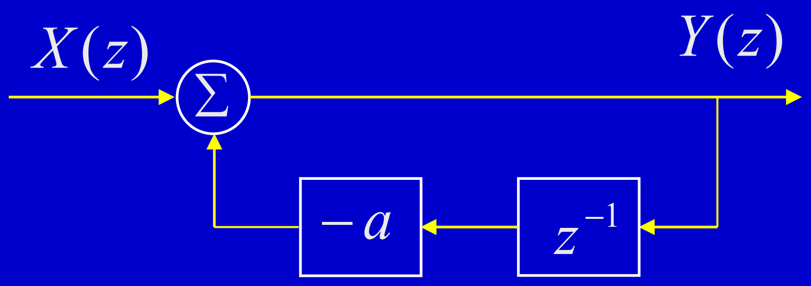


零极点图

频响特性为

$$H(e^{j\Omega})=\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-a}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

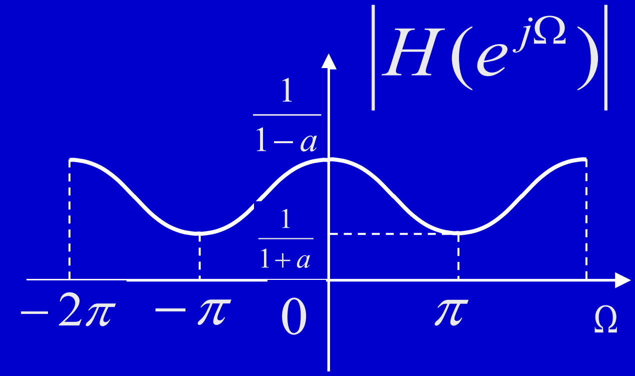
$$=\frac{1}{(1-a\cos\Omega)+ja\sin\Omega}$$



系统模拟图

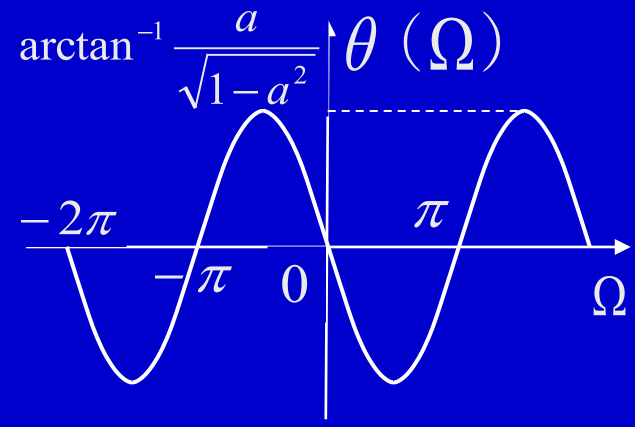
幅频特性为

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\Omega}}$$



相频特性为

$$\theta(\Omega) = -arctg\frac{a\sin\Omega}{1-a\cos\Omega}$$



1. 幅频曲线为偶对称，相频曲线为奇对称，一般均为连续函数；

2. 不同于连续系统，曲线是周期函数，周期为 2π ；

3. 离散系统也有高通、低通之分。

$0<a<1$　低通

$-1<a<0$　高通

$a=0$　全通

本章要点

- 1.常用序列的Z变换（ 表6-1）
- 2. Z反变换
- 幂级数展开法 部分分式展开法
- 3. Z变换的性质（表6-2）
- 4.离散系统的Z域分析
- 5.离散系统函数和系统的稳定性
- 6.离散系统的模拟

作 业

6.1-6.2：

6-1(4)(8)，6-2(1)，6-3(1)(3)，

6.3：

6-4(3)(5)(6) ，6-5(1)(2)

6.4：

6-7(2)，6-8(1)，

6.5：

6-12，6-14，6-16(1)(2)

6.6：

6-17(1)，6-18